

**Cours : LA DERIVATION Avec Exercices avec solutions**

PROF: ATMANI NAJIB

1BAC SM BIOF

# LA DERIVATION

## I) DERIVATION EN UN POINT

### 1) Activité

Déterminer la limite quand  $x$  tend vers  $a$  de

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ Dans les cas suivants :}$$

1-  $f(x) = 3x^2 - x + 5$  et  $a = -2$

2-  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$  et  $a = 2$

3-  $f(x) = \sin 3x$  et  $a = \frac{\pi}{6}$

4-  $f(x) = |2x^2 + x - 3|$  et  $a = 1$ .

### 2) Définition :

**Définition :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre  $a$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie. Dans ce cas on}$$

appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $a$  et se note  $f'(a)$ .

**Exemple :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + x - 3$ . Justifier que  $f$  est dérivable en  $-2$  et préciser  $f'(-2)$

**Solution :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 3 + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} x - 1 = -3 = f'(-2) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est dérivable en  $-2$  et  $f'(-2) = -3$

**Remarque :** Si  $f$  est dérivable en  $a$  et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

On pose :  $h = x - a$  si  $x$  tend vers  $a$  alors  $h$  tend vers  $0$  et on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

**Application :** Calculer le nombre dérivé de

$f(x) = x^3 + x$  en  $a = 1$  en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

$$\begin{aligned} \text{Solution : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^3 + 1 + h - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h + 1 + 1 + h - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 3h + 4 = 4 = f'(1) \end{aligned}$$

### 3) Dérivé à droite / dérivé à gauche.

**Activité :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; & x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; & x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

Que peut-on conclure ?

**Solution :**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x + 3 = 3 = f'_d(0)$$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction  $f$  à droite de 0

On dit que  $f$  est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction  $f$  à gauche de 0

On dit que  $f$  est dérivable à gauche en 0

Mais on a :  $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc :  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Définition :1)** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$  où  $r > 0$

On dit que  $f$  est dérivable à droite de  $a$  si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie, dans ce cas on}$$

appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction  $f$  à droite de  $a$  et on le note :  $f'_d(a)$

2) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a - r, a]$  où  $r > 0$

On dit que  $f$  est dérivable à gauche de  $a$  si la

limite  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie, dans ce

cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction  $f$  à gauche de  $a$  et on le note :  $f'_g(a)$

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre  $a$ .

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si elle dérivable à droite et à gauche de  $a$  et  $f'_d(a) = f'_g(a)$

**Preuve :** En exercice.

**Exemple1 :** soit  $f$  une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \dots x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \dots x < 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$

**Solution :** on a  $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = f'_d(1)$$

Donc  $f$  est dérivable à droite en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche en 1

et on a :  $f'_d(1) = f'_g(1)$

Donc  $f$  est dérivable en 1 et  $f'(1) = \frac{1}{2}$

**Exemple2 :** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - |x|$$

étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$

**Solution :**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1 = f'_d(0)$$

donc  $f$  est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche en 0

Mais on a :  $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc :  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Exercice1 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

1- Montrer que  $f$  est dérivable en  $a = -2$ .

2-  $f$  est-elle dérivable en 0.

**Exercice2 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$$

1- Ecrire une expression de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sans valeur absolu.

2- Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche de  $-1$ .

3-  $f$  est-elle dérivable en  $-1$ .

## II) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

### 1) Rappelles

Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par  $A(-1,3)$  et de le

Coefficient directeur  $-2$

### 2) La fonction affine tangente à une fonction.

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  et  $f'(a)$  son nombre dérivé en  $a$ .

$$\text{Posons : } \begin{cases} \phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a); x \neq 0 \\ \phi(x) = 0; x = 0 \end{cases}$$

On a :  $(x - a)\phi(x) = -f'(a)(x - a) + f(x) - f(a)$

et par suite :  $f(x) = f'(a)(x - a) + f(a) + (x - a)\phi(x)$

Posons :  $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$  on aura :

$$f(x) = u(x) + (x - a)\phi(x)$$

La fonction  $u$  est une fonction affine et s'appelle la fonction affine tangente en  $a$ .

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ .  $f$  admet une fonction affine tangente en  $a$  de la forme :  $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$

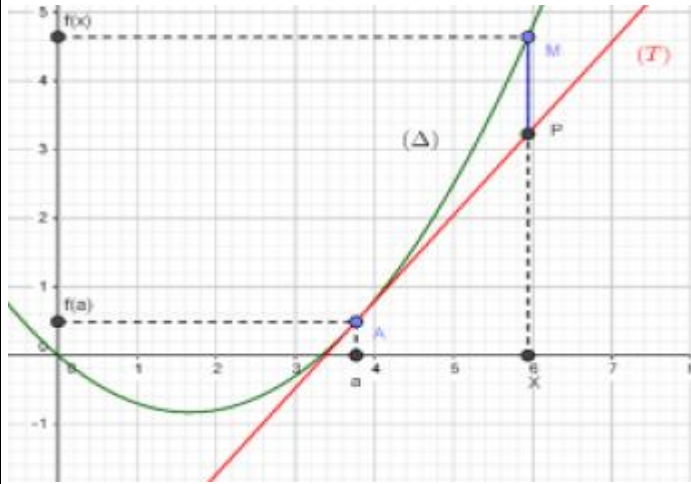
**Application :** Déterminer une fonction affine

tangente en  $-3$  de la fonction  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

**Propriété :** Toute fonction dérivable en  $a$  est continue en  $a$ .

**Preuve :** Puisque  $f$  est dérivable en  $a$  alors :

$$f(x) = f'(a)(x - a) + f(a) + (x - a)\phi(x)$$



en passant à la limite :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  donc  $f$  est continue en  $a$

La réciproque de la propriété précédente n'est pas vraie :  $f(x) = |x|$  est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

**Remarques :** 1) La fonction affine tangente en  $a$  d'une fonction dérivable en  $a$  est une approximation de  $f$  au voisinage de  $a$   
On peut écrire alors :  $f(x) \sim f'(a)(x - a) + f(a)$  au voisinage de  $a$

2) Si on pose  $x = a + h$  ; on aura :  $f(a + h) \sim f'(a)h + f(a)$  qui dit que si on ne connaît pas  $f(a + h)$  et si  $h$  est petit, on peut "essayer de mettre"  $f'(a)h + f(a)$  à la place de  $f(a + h)$ .

**Exemple :** donner une approximation de  $\sin 3$

**Solution :** Si on veut une approximation de  $\sin 3$ , on peut prendre :  $f(x) = \sin x$  et  $a = \pi$  (car  $\pi$  est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu)  $h = 3 - \pi$  (pour avoir :  $3 = \pi + h$ )

On a alors  $f(a) = \sin \pi = 0$  et  $f'(a) = \cos \pi = -1$  (à prouver) ce qui donne :

$\sin 3 = \sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3$ .

**Exercice3 :** soit  $f$  une fonction définie sur

$$]-\pi; \pi[ \text{ par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\tan \frac{x}{2}} \dots \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) étudier la dérivabilité de  $f$  en 0

2) Donner une valeur approchée

du nombre :  $f(10^{-5})$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\tan \frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan \frac{x}{2}}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} = 2 \times 1 = 2$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 2$

2) on a  $f(a + h) \sim f'(a)h + f(a)$

Donc  $f(0 + 10^{-5}) \sim f(0) + 10^{-5} f'(0)$   $a = 0$  et  $h = 10^{-5}$

$f(0) = 0$  et  $f'(0) = 2$

Donc  $f(10^{-5}) \sim 2 \times 10^{-5}$

### 3) Interprétations géométriques.

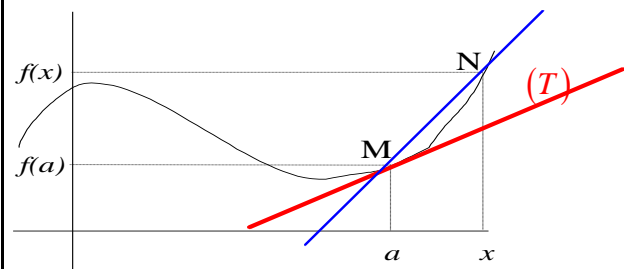
#### 3.1 Tangente en un point.

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $M(a, f(a))$

Soit  $x$  un élément de  $Df$  différent de  $a$

et  $N(x, f(x))$   $(\Delta) = (MN)$  ; le coefficient directeur

de  $(\Delta)$  est le réel :  $m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$



En faisant tendre  $x$  vers  $a$  et à la position limite une droite  $(T)$  qui

passé par  $M(a, f(a))$  et qui a pour coefficient

directeur :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  qui n'est que  $f'(a)$

(car  $f$  est dérivable en  $a$ )

Donc :  $(T): y = f'(a)x + p$  et puisque  $(T)$  passe par  $A(a, f(a))$

alors :  $f(a) = f'(a)a + p$  donc  $p = f(a) - f'(a)a$  et on peut conclure que :

$(T): y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$

Finalement ;  $(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$

La droite  $(T)$  s'appelle la tangente à la courbe  $Cf$  en  $A(a, f(a))$

**Théorème :** Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors sa courbe représentative  $C_f$  admet une tangente  $(T)$  en  $A(a, f(a))$  d'équation :

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Exemple :**

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction  $f(x) = \sin x$  en  $A(0, f(0))$

**Solution :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f'(0)$

Donc  $f$  est dérivable en  $0$

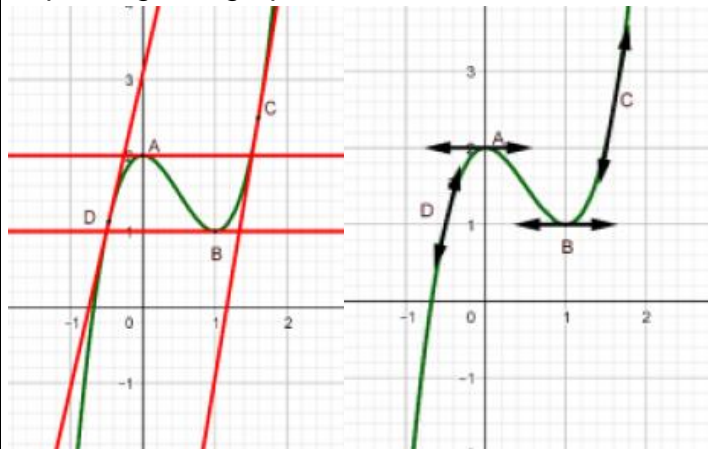
$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

L'équation de la tangente à la courbe en  $A(0, f(0))$  est :  $(T): y = x$

**Remarque :** 1) La tangente  $(T)$  à la courbe  $C_f$  en  $A(a, f(a))$  ce n'est que la droite qui représente la fonction affine tangente à la fonction  $f$  en  $a$  et qui est  $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$  et :

$$\overline{PM} = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) = \varphi(x)(x - a)$$

2) En pratique au lieu de représenter la droite  $(T)$  on Représente seulement une partie de  $(T)$  avec deux flèches de direction et ceci afin de ne pas trop charger le graphe.



a) Cas particulier si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = 0$  alors l'équation de la tangente est :  $(T): y = f(a)$  c'est une droite parallèle à l'axe  $(Ox)$

b) Le vecteur directeur de la tangente en

$$A(a, f(a)) \text{ est } \vec{u}(1; f'(a))$$

Donc pour tracer une tangente on peut  
Seulement à partir de  $A$  tracer le vecteur  $\vec{u}$

### 3.2 Demi-tangente.

Par la même façon que le paragraphe précédent on peut montrer le théorème suivant :

**Théorème :** 1) Si  $f$  est une fonction dérivable à droite de  $a$ , alors son graphe admet une demi-tangente à droite de  $a$  :

$$(T_d): y = f'_d(a)(x - a) + f(a) : x \geq a$$

2) Si  $f$  est une fonction dérivable à gauche de  $a$ , alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de  $a$  :

$$(T_g): y = f'_g(a)(x - a) + f(a) : x \leq a$$

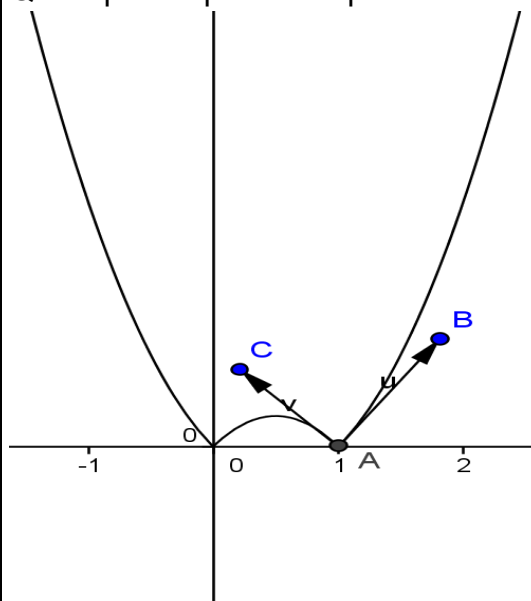
**Exemple :**  $f(x) = |-2x^2 + x + 1|$

On a :  $f$  est dérivable à droite de  $1$  et  $f'_d(1) = 3$  (à prouver) et est dérivable à gauche de  $1$  et  $f'_g(1) = -3$  donc la courbe représentative de  $f$  admet deux demi-tangentes en  $A(1, f(1))$ .

$$(T_d): y = 3(x - 1) \quad x \geq 1$$

$$(T_g): y = -3(x - 1) \quad x \leq 1$$

Qu'on peut représenter par :



**Remarque :**

Dans cet exemple, au voisinage de  $a$ , on ne peut pas confondre la courbe avec un segment ( $f$  n'est pas dérivable en  $a$ ) on dit que la courbe représente un **point anguleux** en  $A(1, f(1))$

**Exercice 4:** soit  $f$  une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \dots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} \dots x > 1 \end{cases}$$

1) déterminer le domaine de définition de  $f$

2)étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 0$  et donner une interprétation géométrique du résultat  
3)étudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche en  $x_0 = 1$  et donner une interprétation géométrique

**Solution :1)**  $x \in D_f \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0$  et  $0 \leq x \leq 1$

ou  $x^3 - x \geq 0$  et  $x > 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$  ou  $x > 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in [0; +\infty[$  donc :  $D_f = [0; +\infty[$

2) étude de la dérivabilité de  $f$  à droite de  $x_0 = 0$

On a :  $f(0) = 1$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{x(\sqrt{1-x^2}+1)} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1}$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 = f'_d(0)$

Donc  $f$  est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de  $f$  admet un demi tangent en  $A(0, 1)$ .de coefficient directeur  $1 = f'_d(0)$

3)a)étudie de la dérivabilité de  $f$  à gauche en

$x_0 = 1$  On a :  $f(1) = 0$  soit  $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} -(1+x)^2 = -4$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à gauche en  $x_0 = 1$

b)soit  $x > 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^3-x}-0}{x-1} = \frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3-x}} = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}$$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^3-x} = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+x = 2$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}} = +\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de  $f$  admet un demi tangent en  $A(1,0)$  parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le haut

**Exercice5 :** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

1)étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 1$  et

donner une interprétation géométrique du résultat

2)étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en

$x_0 = 1$  et donner une interprétation géométrique

du résultat

3)étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$  et donner

une interprétation géométrique du résultat

4)donner l'équation de la demie tangente à droite

a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 1$

4)donner l'équation de la demie tangente à

gauche a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 1$

**Solution :1)**  $f(x) = |x^2 - 1|$

étude du signe de :  $x^2 - 1$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Donc :  $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1; x \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[ \\ f(x) = -(x^2 - 1); x \in [-1; 1] \end{cases}$  et

$$f(1) = |1^2 - 1| = 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$x^2-1$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

1)étude de la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2$$

Donc  $f$  est dérivable à droite en  $x_0 = 1$  et  $f'_d(1) = 2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de  $f$  admet un demi tangent à droite en

$A(1, 0)$ .de coefficient directeur  $f'_d(1) = 2$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2-1)-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0 = 1$  et  $f'_g(1) = -2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de  $f$  admet un demi tangent à gauche

en  $A(1, 0)$ .de coefficient directeur  $f'_g(1) = -2$

3) $f$  n'est pas dérivable en  $x_0 = 1$  car :  $f'_d(1) \neq f'_g(1)$



**Interprétation géométrique du résultat :**

La courbe admet un point anguleux en  $A(1, 0)$ .

4) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 1$  est :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

5) l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 1$  est :

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(1) + f'_g(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 0 - 2(x - 1) \Leftrightarrow (\Delta_g): y = -2x + 2$$

**III) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION.**

**1) Introduction**

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 2x^2 + x.$$

Soit  $x$  un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  ( il est préférable d'utiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 + x+h - 2x^2 - x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + x+h - 2x^2 - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h + 1 = 4x + 1 = f'(x)$$

On peut remarquer donc que  $f$  est dérivable en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}$ , la fonction qui associe à  $x$  son nombre dérivé  $f'(x)$

S'appelle la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et se note par  $f'$ .

**Activités :** 1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $\sin$  sur  $\mathbb{R}$ .

2- Déterminer la fonction dérivée de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \text{ et sur } \mathbb{R}^{*-}$$

**2) Dérivabilité sur un intervalle.**

**Définition :** Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $Df$ ,  $a$  et  $b$  deux éléments de  $Df$  tels que :  $a < b$

1) On dit que  $f$  est dérivable sur l'ouvert  $]a, b[$  si elle est dérivable en tout point de  $]a, b[$

2) On dit que  $f$  est dérivable sur le semi-ouvert  $[a, b[$  si elle est dérivable sur  $]a, b[$  et dérivable à droite de  $a$

3) On dit que  $f$  est dérivable sur le fermé  $[a, b]$  si elle est dérivable sur  $]a, b[$  et dérivable à droite de  $a$  et à gauche de  $b$

**Remarque :** Une fonction qui est dérivable sur  $[a, b]$  et dérivable  $[b, c]$  n'est pas nécessairement dérivable sur  $[a, c]$  sauf si  $f'_d(b) = f'_g(b)$

**3) Fonction dérivée d'une fonction.**

**Définition :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ . La fonction qui associe à tout élément  $x$  son nombre dérivé  $f'(x)$  s'appelle la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $I$ .

**Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles.**

**Exercices :** Déterminer les fonctions dérivées des fonctions :

1.  $x \mapsto C$  sur  $\mathbb{R}$     2.  $x \mapsto x^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

3.  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$

4.  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et sur  $\mathbb{R}^{*-}$ .    5.  $x \mapsto \sin x$  sur  $\mathbb{R}$ .

6.  $x \mapsto \cos x$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Tableau des dérivées des fonctions usuelles**

$f'$	Fonction $f$
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$f'(x) = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}^*$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos x$
$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
$f'(x) = -a \sin(ax + b)$	$f(x) = \cos(ax + b)$
$f'(x) = a \cos(ax + b)$	$f(x) = \sin(ax + b)$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$

**Exemples :** Déterminer les fonctions dérivées

des fonctions suivantes : 1)  $f(x)=11$

2)  $f(x)=7x+15$  3)  $f(x)=x^3$  4)  $f(x)=\sin(5x-1)$

**Solution :** 1)  $f'(x)=(11)'=0$  2)  $f'(x)=(7x+15)'=7$

3)  $f'(x)=(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$

4)  $f'(x)=(\sin(5x-1))'=(5x-1)'\cos(5x-1)=5\cos(5x-1)$

#### IV) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

**Rappelle :** A partir de deux fonctions  $f$  et  $g$  on peut définir :

1) la somme :

$$(\forall x \in D_f \cap D_g) (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

2) Le produit :

$$(\forall x \in D_f \cap D_g) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

3) L'inverse :  $(\forall x \in D_f)$  si  $x \neq 0$  alors

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

4) Le quotient :  $(\forall x \in D_f \cap D_g)$  si  $x \neq 0$  alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

5) La racine :  $(\forall x \in D_f)$  si  $x \geq 0$  alors

$$(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$$

#### 1) La somme

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $a$ , étudions la dérivabilité de la fonction  $(f + g)$  en  $a$ .

On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= f'(a) + g'(a) = (f' + g')(a)$$

En général : Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur un intervalle ouvert  $I$  alors la fonction  $(f + g)$  est dérivable sur  $I$  et  $(f + g)' = f' + g'$

**Exemple :** Déterminer la fonction dérivée de la

fonction suivante :  $f(x) = x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

**Solution :**

$$f'(x) = \left(x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = (x^2)' + (7x+15)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + (\sqrt{x})'$$

$$f'(x) = \left(x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = 2x + 7 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**2) Le produit :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $a$ , étudions la dérivabilité de la fonction  $(f \times g)$  en  $a$ .

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \times g(x) - f(a) \times g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \times g(x) - f(x) \times g(a) + f(x) \times g(a) - f(a) \times g(a)}{x - a}$$

(on a ajouté et retranché le même nombre)

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \frac{(g(x) - g(a))}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} g(a) \frac{(f(x) - f(a))}{x - a}$$

$$= g'(a) \times f(a) + f'(a) \times g(a) = (f'g + g'f)(a)$$

( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  car  $f$  est continue)

En général : Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur un intervalle ouvert  $I$  alors la fonction  $(f \times g)$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(f \times g)' = f'g + g'f$$

En particulier : Si  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $k \in \mathbb{R}$  alors la fonction  $kf$  est dérivable sur  $I$  et :  $(kf)' = k f'$

**Exemples :** Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante :  $f(x) = (5x^2 + 1)(3x - 1)$

On utilise la formule :  $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((5x^2 + 1)(3x - 1))' = (5x^2 + 1)' \times (3x - 1) + (5x^2 + 1) \times (3x - 1)'$$

$$f'(x) = 10x \times (3x - 1) + 3(5x^2 + 1) = 30x^2 - 10x + 15x^2 + 3$$

$$f'(x) = 45x^2 - 10x + 3$$

#### 3) Puissance

On utilisant la propriété précédente et par récurrence prouver que :

$$(f^n)' = n f' f^{n-1}$$

**Exemple :** Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = (3x + 4)^3$

On utilise la formule :  $(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = ((3x + 4)^3)' = 3 \times (3x + 4)^{3-1} \times (3x + 4)' = 3 \times 3 \times (3x + 4)^{3-1} = 9(3x + 4)^2$$

**4) L'inverse :** Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  et  $f(a) \neq 0$  étudions la dérivabilité de la fonction

$$\frac{1}{f} \text{ en } a. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-(f(x)-f(a))}{f(x)f(a)}}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(f(x)-f(a))}{x-a} \times \frac{1}{f(x)f(a)} = -\frac{f'(a)}{f(a)^2} = \left(-\frac{f'}{f^2}\right)(a)$$

En général si  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $f$  ne s'annule pas sur  $I$  alors :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

**Exemple :** Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

On utilise la formule :  $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x'}{(\sin x)^2}$$

**5) Quotient :** En remarquant que :  $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$

et en utilisant les propriétés du produit et de l'inverse on peut montrer que :

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur un intervalle ouvert  $I$

et  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors :  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

**Exemple :** Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

On utilise la formule :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)' = \frac{(3x-1)'(x+2) - (3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - 1 \times (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

**Application :**

Montrer que la fonction  $\tan$  est dérivable sur les intervalles de la forme

$I_k = ]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[ (k \in \mathbb{Z})$  et que

$(\forall x \in I_k)(\tan'x = 1 + \tan^2x)$ .

**6) La racine :**

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  et  $f(a) > 0$

étudions la dérivabilité de la fonction  $\sqrt{f}$  en  $a$ .

On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)})(\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)})}{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)})(x-a)}$$

(On a multiplié par le conjuguais)

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)})(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \frac{1}{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)})}$$

$$= \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}} = \left(\frac{f'}{2\sqrt{f}}\right)(a)$$

En générale ; si  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et **strictement positif sur  $I$**  alors  $\sqrt{f}$

est dérivable sur  $I$  et  $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

**Exemple :** Déterminer la fonction dérivée de la fonction :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x}$

On utilise la formule :  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 8x})' = \frac{(x^2 + 8x)'}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x}}$$

**Exercice6 :** Soit  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Etudier le domaine de dérivation de  $f$  et déterminer sa fonction dérivée.

**Solution :**  $D_f = ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

On a :  $f(x) = \sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = x^2 - x$

Et on a :  $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Donc  $f$  est dérivables sur  $D_f - \{0; 1\}$

$$\forall x \in D_f - \{0; 1\} : f'(x) = (\sqrt{x^2 - x})' = \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

**Remarque :**

Pour calculer la dérivée de  $|f|$ , on procède comme suit :

-Exprimer  $|f|$  sans le symbole de la valeur absolue sur des intervalles de  $D_f$

-Calculer la dérivée des fonctions obtenues sur ces intervalles.

Déterminer la dérivée de la fonction

$$f(x) = |3x^2 + x - 4|$$



**Propriété :**

- 1) Toute fonction polynôme est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition

**Tableau des opérations sur les fonctions dérivées**

$f'$	Fonction f
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$
$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = u + v$
$f'(x) = u' - v'$	$f(x) = u - v$
$f'(x) = k.u'$	$f(x) = k.u$
$f'(x) = u' \times v + u \times v'$	$f(x) = u \times v$
$f'(x) = m.u^n \times u'$	$f(x) = u^n$
$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$	$f(x) = \frac{1}{u}$
$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$f(x) = \frac{u}{v}$
$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x) = \sqrt{u}$

**Exercice7 :** Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- 1)  $f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1$     2)  $f(x) = \frac{3}{x}$
- 3)  $f(x) = 4\sqrt{x} - 1$     4)  $f(x) = \cos 2x + 3\sin 3x$
- 5)  $f(x) = (3x^2 + 2)(7x + 1)$     6)  $f(x) = \frac{1}{5x + 7}$
- 7)  $f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1}$

**Solutions :**

1)  $f'(x) = \left(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1\right)' = 4 \times 4x^{4-1} - \frac{1}{3} \times 3x^{3-1} - 1 + 0 = 16x^3 - x^2 - 1$

2)  $f'(x) = \left(\frac{3}{x}\right)' = \left(3 \times \frac{1}{x}\right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$

3)  $f'(x) = (4\sqrt{x} - 1)' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$

4)  $f'(x) = (\cos 2x + 3\sin 3x)' = -2\sin 2x + 3 \times 3 \cos 3x = -2\sin 2x + 9\cos 3x$

5)  $f(x) = (3x^2 + 2)(7x + 1)$

On utilise la formule :  $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$f'(x) = ((3x^2 + 2) \times (7x + 1))' = (3x^2 + 2)' \times (7x + 1) + (3x^2 + 2) \times (7x + 1)'$

$f'(x) = 6x \times (7x + 1) + 7(3x^2 + 2) = 42x^2 + 6x + 21x^2 + 14 = 63x^2 + 6x + 14$

7)  $f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1}$

On utilise la formule :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3 + 1}\right)' = \frac{(7x)'(x^3 + 1) - 7x(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7(x^3 + 1) - 7x \times 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$

$f'(x) = \frac{7x^3 + 7 - 21x^3}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7 - 14x^3}{(x^3 + 1)^2}$

**Exercice8 :** Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes ;

1.  $f(x) = -2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1$

2.  $f(x) = (3x^2 + 1)(2x + 3)$

3.  $f(x) = \frac{3x^2 + x}{5x^2 + 1}$

4.  $f(x) = \frac{3x^2 + x}{5x^2 + 1}$

5.  $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x^2 + 1}$

6.  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 3x + 1}$

**Exercice9 :** déterminer  $f'(x)$  dans les cas suivants :

1)  $f(x) = 9x + 2$

2)  $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

3)  $f(x) = x + \frac{2}{x}$

4)  $f(x) = \frac{5x + 2}{3x - 1}$

5)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

6)  $f(x) = \frac{1}{(2x + 1)^5}$

7)  $f(x) = (5x^3 - 3)^4$

8)  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$

9)  $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$       10)  $f(x) = x + \frac{x^2}{x-1}$

11)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$       12)  $f(x) = x \cos x$

13)  $f(x) = \tan^2 x$       14)  $f(x) = \cos x \times \sin x$

15)  $f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$       16)  $f(x) = \frac{(1+2x+x^2)^5}{4}$

17)  $f(x) = 1+x + \frac{x-1}{\sqrt{2+x^2}}$       18)  $f(x) = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

**Exercice 10:** Etudier le domaine de dérivation de  $f$  et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1)  $f(x) = x^2 + 3x - 1$       2)  $f(x) = 4 \sin x$

3)  $f(x) = x^4 \cos x$       4)  $f(x) = \sqrt{x} + x^3$

5)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$       6)  $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$

7)  $f(x) = \frac{4x-3}{2x-1}$       8)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

9)  $f(x) = (2x+3)^5$

**Solution :** 1)  $f(x) = x^2 + 3x - 1$   $D_f = \mathbb{R}$

$f$  est une fonction polynôme donc dérivable sur  $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^2)' + (3x-1)' = 2x+3$

2)  $f(x) = 4 \sin x$        $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = 4u(x)$  avec  $u(x) = \sin x$

Puisque  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  alors  $f$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(u(x))' = 4 \cos x$

3)  $f(x) = x^4 \cos x$        $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = u(x) \times v(x)$  avec  $u(x) = x^4$  et  $v(x) = \cos x$

Puisque  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  alors  $f$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$

On utilise la formule :  $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$f'(x) = ((x^4) \times (\cos x))' = (x^4)' \times (\cos x) + (x^4) \times (\cos x)'$

$f'(x) = 4x^3 \times (\cos x) - x^4 \times \sin x = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$

4)  $f(x) = \sqrt{x} + x^3$        $D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$

$f(x) = u(x) + v(x)$  avec  $u(x) = \sqrt{x}$  et  $v(x) = x^3$

Puisque  $u$  est dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $v$  est dérivables en particulier sur  $\mathbb{R}_+^*$  alors  $f$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = (u(x))' + (v(x))' = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 3x^2$

5)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$        $D_f = \mathbb{R}^{*+} = ]0; +\infty[$

On a :  $f(x) = \frac{1}{u(x)}$  avec  $u(x) = \sqrt{x}$

Puisque  $u$  est dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$

Donc  $f$  est dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$

On utilise la formule :  $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

6)  $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$        $D_f = \mathbb{R} - \left\{-1; \frac{1}{4}\right\}$

Puisque  $f$  est une fonction rationnelle alors il

dérivable sur  $D_f = \mathbb{R} - \left\{-1; \frac{1}{4}\right\}$

est on a :  $f(x) = \frac{6}{u(x)}$  avec  $u(x) = 4x^2 + 3x - 1$

$f'(x) = 6 \left(\frac{1}{u(x)}\right)' = 6 \left(-\frac{u'}{u^2}\right) = -6 \frac{(4x^2 + 3x - 1)'}{(4x^2 + 3x - 1)^2} = -6 \frac{8x + 3}{(4x^2 + 3x - 1)^2}$

7)  $f(x) = \frac{4x-3}{2x-1}$        $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Puisque  $f$  est une fonction rationnelle alors il

dérivable sur  $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$f(x) = u(x)/v(x)$  avec  $u(x) = 4x - 3$  et

$v(x) = 2x - 1$

On utilise la formule :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{(4x-3)'}{(2x-1)} - \frac{(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{8x - 4 - 8x + 6}{(2x-1)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2}$

8)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$       :  $D_f = ]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

On a :  $f(x) = \sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = x^2 - 4$

Et on a :  $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{-2; 2\}$

Donc  $f$  est dérivable sur  $D_f - \{-2; 2\}$

$\forall x \in D_f - \{-2; 2\}$  :

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - 4})' = \frac{(x^2 - 4)'}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

9)  $f(x) = (2x+3)^5 \quad D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = (u(x))^5$  avec  $u(x) = 2x+3$

On utilise la formule :  $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = ((2x+3)^5)' = 5 \times (2x+3)^{5-1} \times (2x+3)' = 5 \times 2 \times (2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$$

**Exercice 11** : soit  $f$  une fonction définie sur

$$I = ]-\pi; \pi[ \text{ par : } \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\cos x - 1}{\sin x}; \text{ si } \dots 0 < x < \pi \\ f(x) = \frac{x|x+1|}{x-1}; \text{ si } \dots -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

1) montrer que  $f$  est dérivable en  $x_0 = 0$  et donner l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $x_0 = 0$

2) a) étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = -1$   
 b) donner les équations des demies tangentes à la courbe de  $f$  en en  $x_0 = -1$

**Solution** : 1) étude de la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\cos x - 1}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2 \times \frac{1}{2} \times 1 = -1 = f'_d(0)$$

Donc  $f$  est dérivable à droite en  $x_0 = 0$  et  $f'_d(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 = f'_g(0)$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0 = 0$  et

$$f'_g(0) = -1$$

Et puisque :  $f'_d(0) = f'_g(0)$

Donc  $f$  est dérivable à en  $x_0 = 0$  et  $f'(0) = -1$

*Interprétation géométrique du résultat :*

La courbe de  $f$  admet une tangente en  $O(0, 0)$  de coefficient directeur  $f'(0) = -1$

l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en

$$x_0 = 0 \text{ est : } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow (T) : y = -x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{2} = f'_d(-1)$$

Donc  $f$  est dérivable à droite en  $x_0 = -1$  et  $f'_d(-1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{x - 1} = -\frac{1}{2} = f'_g(-1)$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0 = -1$  et

$$f'_g(-1) = -\frac{1}{2} \text{ mais on a : } f'_d(-1) \neq f'_g(-1)$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0 = -1$

*Interprétation géométrique du résultat :*

La courbe admet un point anguleux en  $A(-1, 0)$ .

b) l'équation de la demie tangente à droite à la courbe de  $f$  en en  $x_0 = -1$  est :

$$y = f(-1) + f'_d(-1)(x + 1) \text{ avec } x \geq -1$$

$$y = 0 + \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow (T_d) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ avec } x \geq -1$$

l'équation de la demie tangente à gauche à la courbe de  $f$  en en  $x_0 = -1$  est :

$$y = f(-1) + f'_g(-1)(x + 1) \text{ avec } x \leq -1$$

$$y = 0 - \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow (T_g) : y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ avec } x \leq -1$$

**Exercice 12** : soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{3x - 2} \left( \frac{2x + 1}{x - 1} \right)^3$$

1) déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$

2) déterminer le domaine de dérivation de  $f$  et déterminer sa fonction dérivée

**Solution** : 1)  $x \in D_f \Leftrightarrow 3x - 2 \geq 0$  et  $x - 1 \neq 0$

$$\text{Donc : } D_f = \left[ \frac{2}{3}; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

2) on a  $f(x) = g(3x - 2) \times h(x)$

$$\text{Avec : } h(x) = \left( \frac{2x + 1}{x - 1} \right)^3 \text{ et } g(x) = \sqrt{x}$$

On sait que :  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_*^+$  et la fonction polynôme  $D_f \ x \rightarrow 3x-2$  est dérivable sur  $D_f$

$3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$  donc la fonction  $x \rightarrow g(3x-2)$

est dérivable sur  $D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

donc :  $f$  est dérivable sur  $D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$  cad  $D_{f'} = D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

$\forall x \in D_{f'} :$

$$f'(x) = (g(3x-2))' \times h(x) + g(3x-2) \times (h(x))'$$

$$(g(3x-2))' = (3x-2)' \times g'(3x-2) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$$

$$\text{Car : } g'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(h(x))' = 3 \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)' \times \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^2$$

$$\left( \frac{2x+1}{x-1} \right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \times \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^3 + \sqrt{3x-2} \frac{-9}{(x-1)^2} \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^2$$

**Exercice13** : en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$$

Solution: 1) on pose :  $f(x) = (x+2)^{2018}$  on a :  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier en -1 et

$$f(-1) = (-1+2)^{2018} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

Et puisque :  $f'(x) = 2018(x+2)^{2017} (x+2)' = 2018(x+2)^{2017}$

$$\text{Donc : } f'(-1) = 2018 \times 1^{2017} = 2018$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} = 2018$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} \quad \text{on pose } f(x) = 2 \sin x$$

on a :  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier en

$$\frac{\pi}{6} \text{ et } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \left(\frac{\pi}{6}\right)} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Et puisque :  $f'(x) = 2 \cos x$

$$\text{Donc : } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux  
calculs et exercices Que l'on devient un  
mathématicien

